BOVEN EN ONDER DE LIJN DOOR DE BUIGPUNTEN

VAN DE GRAFIEK VAN EEN VIERDEGRAADSFUNCTIE

Sjoerd Zondervan

In Euclides nummer 1 besprak Ruud Stolwijk het vwo wiskunde B eindexamen. Bij de tweede opgave, Boven en onder de lijn door de buigpunten, stelde hij een interessante vraag. Samengevat: levert een lijn door de buigpunten van een vierdegraadsfunctie altijd een situatie op waarbij twee van de drie ingesloten oppervlakten samen gelijk zijn aan de derde.' Sjoerd Zondervan reageerde en u vindt zijn uitwerking hier.

De lijn door de buigpunten wordt bepaald door twee verschillende punten. Er zijn buigpunten als de tweede afgeleide van teken wisselt. Bij een vierdegraadsfunctie is de tweede afgeleide een tweedegraadsfunctie. Deze tweedegraadsfunctie moet dus twee verschillende nulpunten hebben. Omdat de grootte van de gebieden niet verandert bij een horizontale verschuiving van de grafiek van *f* kunnen we als nulpunten kiezen $x=0$ en $x = p$ (met $p>0$). Als functievoorschrift voor de tweede afgeleide kunnen we dus kiezen: $f''(x) = ax(x-p)$ ofwel

$f''(x) = ax^2 - apx$ (met $a \neq 0$). Voor de eerste afgeleide geldt dus: $f'(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}apx^2 + b$ en voor het

voorschrift van de vierdegraadsfunctie $f(x) = \frac{1}{12}ax^4 - \frac{1}{6}apx^3 + bx + c$.

Omdat de grootte van de gebieden niet verandert bij een verticale verschuiving van de grafiek van *f* mogen we de constante c wel weglaten. Dus als voorschrift voor een vierdegraadsfunctie met een lijn door de buigpunten van

de grafiek mogen we kiezen $f(x) = \frac{1}{12}ax^4 - \frac{1}{6}apx^3 + bx$. De buigpunten zijn dus $(0,0)$ en $(p, -\frac{1}{12}ap^4 + bp)$.

De lijn door de buigpunten heeft als vergelijking : $y = (-\frac{1}{12}ap^3 + b)x$. Voor de x-coördinaten van de snijpunten van de lijn door de buigpunten en de grafiek geldt:

$$\frac{1}{12}ax^4 - \frac{1}{6}apx^3 + bx = (-\frac{1}{12}ap^3 + b)x$$

$$\frac{1}{12}ax^4 - \frac{1}{6}apx^3 + \frac{1}{12}ap^3x = 0$$

$$\frac{1}{12}ax(x^3 - 2px^2 + p^3) = 0$$

$$x = 0 \vee x^3 - 2px^2 + p^3 = 0$$

Het andere buigpunt ligt ook op de lijn, dus $x = p$ is een oplossing van de derdegraadsvergelijking ofwel

$x^3 - 2px^2 + p^3$ is deelbaar door $x - p$.

$$x=0 \vee (x-p)(x^2-px+p^2)=0$$

$$x = 0 \vee x = p \vee x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4p^2}}{2}$$

$$x = 0 \vee x = p \vee x = \frac{1}{2}p(1-\sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})$$

Gerangschikt naar grootte: $x=\frac{1}{2}p(1-\sqrt{5}) \vee x=0 \vee x=p \vee x=\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})$

De totale oppervlakte van de ingesloten gebieden onder de lijn is even groot als de oppervlakte van het ingesloten gebied boven de lijn (bij $a>0$) (of: De totale oppervlakte van de ingesloten gebieden boven de lijn is even groot als de oppervlakte van het ingesloten gebied onder de lijn (bij $a<0$)) indien geldt

$$\int_{\frac{1}{2}p(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})}\left(f(x)-(-\frac{1}{12}ap^3+b)x\right)dx=0.$$

$$\int_{\frac{1}{2}p(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})}\left(f(x)-(-\frac{1}{12}ap^3+b)x\right)dx=$$

$$\int_{\frac{1}{2}p(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})}\left(\frac{1}{12}ax^4-\frac{1}{6}apx^3+bx-(-\frac{1}{12}ap^3+b)x\right)dx=$$

$$\int_{\frac{1}{2}p(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})}\left(\frac{1}{12}ax^4-\frac{1}{6}apx^3+\frac{1}{12}ap^3x\right)dx=\left[\frac{1}{60}ax^5-\frac{1}{24}apx^4+\frac{1}{24}ap^3x^2\right]_{\frac{1}{2}p(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})}=$$

$$\left[\frac{1}{60}a(\frac{1}{2}p)^5(1+\sqrt{5})^5-\frac{1}{24}ap(\frac{1}{2}p)^4(1+\sqrt{5})^4+\frac{1}{24}ap^3(\frac{1}{2}p)^2(1+\sqrt{5})^2\right]-$$

$$\left[\frac{1}{60}a(\frac{1}{2}p)^5(1-\sqrt{5})^5-\frac{1}{24}ap(\frac{1}{2}p)^4(1-\sqrt{5})^4+\frac{1}{24}ap^3(\frac{1}{2}p)^2(1-\sqrt{5})^2\right]=$$

$$\frac{1}{1920}ap^5\left\{(1+\sqrt{5})^5-(1-\sqrt{5})^5\right\}-\frac{1}{384}ap^5\left\{(1+\sqrt{5})^4-(1-\sqrt{5})^4\right\}+\frac{1}{96}ap^5\left\{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2\right\}.$$

Voordat we verder rekenen bekijken we eerst even de volgende machten van tweetermen:

$(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$ en $(1-x)^5=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$

dus $(1+x)^5-(1-x)^5=10x+20x^3+2x^5$

$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ en $(1-x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$

dus $(1+x)^4-(1-x)^4=8x+8x^3$

$(1+x)^2=1+2x+x^2$ en $(1-x)^2=1-2x+x^2$

dus $(1+x)^2-(1-x)^2=4x$.

$x=\sqrt{5}$ geeft $(1+\sqrt{5})^5-(1-\sqrt{5})^5=10\sqrt{5}+100\sqrt{5}+50\sqrt{5}=160\sqrt{5}$

$(1+\sqrt{5})^4-(1-\sqrt{5})^4=8\sqrt{5}+40\sqrt{5}=48\sqrt{5}$ en $(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2=4\sqrt{5}$

We pakken nu de berekening van de integraal weer op:

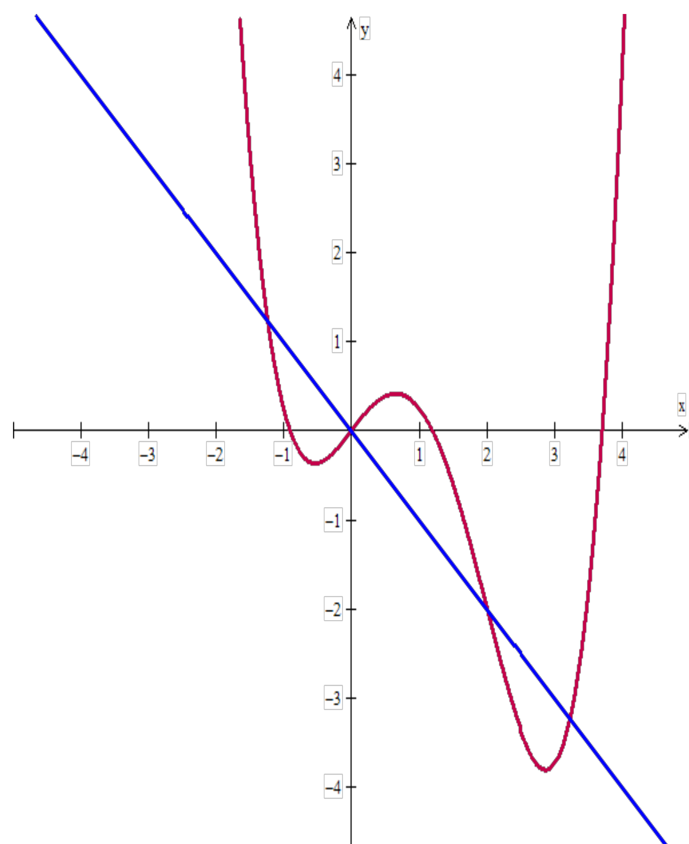
$$\frac{1}{1920}ap^5\left\{(1+\sqrt{5})^5-(1-\sqrt{5})^5\right\}-\frac{1}{384}ap^5\left\{(1+\sqrt{5})^4-(1-\sqrt{5})^4\right\}+\frac{1}{96}ap^5\left\{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2\right\}=$$

$$\frac{1}{1920}ap^5\left\{160\sqrt{5}\right\}-\frac{1}{384}ap^5\left\{48\sqrt{5}\right\}+\frac{1}{96}ap^5\left\{4\sqrt{5}\right\}=$$

$$=\frac{1}{12}ap^5\sqrt{5}-\frac{1}{8}ap^5\sqrt{5}+\frac{1}{24}ap^5\sqrt{5}=0\text{, QED}$$

Figuur 1 geeft een mogelijke grafiek van f met de lijn door de buigpunten ($a = 3$, $p = 2$ en $b = 1$)
Figuur 2 geeft een andere mogelijkheid ($a = -24$, $p = 1$ en $b = 0$)

Figuur 1



Figuur 2

